



LES INDICES STATISTIQUES



INTRODUCTION

- Les indices ont une place importante dans l'étude de l'activité économique et financière :
Indices des prix, de production, du commerce extérieur; indice boursier, etc.
- Les indices permettent de formuler en un seul nombre la synthèse de nombreuses mesures.
- Les indices sont considérés comme un instrument des études chronologiques : évolution des prix à la consommation, etc.

INTRODUCTION



- De façon générale, un indice sert à mesurer une variation relative entre deux situations d'une grandeur que l'on dira simple ou complexe.
- Une grandeur simple est une grandeur entièrement définie par la donnée d'un seul nombre.
- Exemple: PIB/ HABITANT

Entre 2 dates : 2010 et 2000	Entre deux villes Tanger et Tétouan
$I_{2010/2000} = 120$	$I_{Tanger / Tétouan} = 130$

INTRODUCTION



- Une grandeur complexe est une grandeur caractérisée par la donnée de plusieurs nombres. Une grandeur complexe est donc l'énoncé de plusieurs grandeurs simples.
- Le niveau général des prix, la production industrielle, les exportations sont des exemples de grandeurs complexes.
- Exemple: On synthétise l'évolution simultanée de plusieurs variables.

Prix et quantités consommées du café et du sucre

	café			sucre			dépense
	Prix	Quantité	dépense	Prix	Quantité	Dépense	totale
2000	0,8	100	80	0,2	90	18	98
2008	1,4	120	168	0,5	70	35	203

INTRODUCTION



- Dans l'étude des phénomènes économiques et sociaux, on a souvent besoin de décrire les variations de grandeurs simples ou complexes. Ces comparaisons dans le temps et dans l'espace, se font généralement en effectuant le rapport des grandeurs considérées.
- Dans le cas où l'on effectue le rapport de grandeurs simples : on parle d'indice statistique élémentaire.
- Dans le cas où l'on effectue le rapport de grandeurs complexes : on parle d'indice synthétique.

INDICES ELEMENTAIRES



Exemple

Supposons que le prix d'un article était de 60 DH en 2008 et de 75 DH en 2009.

Ces deux prix peuvent être comparés :

- Soit en effectuant la différence $75 - 60 = 15$, on a une augmentation de 15 DH.

Cette comparaison ne donne qu'une information imparfaite car elle ne tient pas compte de l'importance du prix initial.

INDICES ELEMENTAIRES



- Soit en estimant l'accroissement de prix :

$$\frac{75 - 60}{60} = 0,25$$

ou 25% d'augmentation

- Soit en calculant le rapport : $\frac{75}{60} * 100 = 125$.

- Ce rapport indique que la quantité de marchandise qui coûtait 100 DH en 2008 coûte 125 DH en 2009. Soit une augmentation de 25%.

On dit que 125 est l'indice simple du prix de l'appareil étudié en 2009 sur la base 100 en 2008.

INDICES ELEMENTAIRES

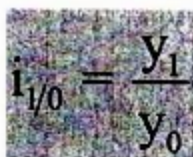


➤ Un indice est le rapport d'une variable mesurée à deux instants différents.

➤ Un indice est représentatif d'une évolution

y_1 = valeur de la variable y à la date t_1

y_0 = valeur de la variable y à la date t_0


$$i_{1/0} = \frac{y_1}{y_0}$$

Indice élémentaire de la variable y à la date t_1 par rapport à la date de référence t_0

INDICES ELEMENTAIRES



$$I_{t/0} = i_{t/0} \times 100$$

Indice élémentaire de la variable y à la date t_1 par rapport à la date de référence t_0 , base 100.

EXEMPLE:

Le nombre d'abonnés à une revue scientifique est passé de 262 806 en 2002 à 305 666 en 2010. L'indice du nombre d'abonnés de 2010 par rapport à 2002 est :

$$I_{2010/2002}(NA) = 100 \times \frac{305666}{262806} = 116,31$$

soit une augmentation de 16,31 %

INDICES ELEMENTAIRES



Exemple:

Le prix d'un bien de grande consommation est passé de 1020 DH en 2004 à 950 DH en 2010. L'indice du prix du bien 2010 par rapport à 2004 est par conséquent :

$$I_{2010/2004}(P) = 100 \times \frac{950}{1020} = 93,14$$

soit une diminution de 6,86 %

INDICES ELEMENTAIRES

Propriétés:

Identité: $i_{n/n} = 1$

Réversibilité: $i_{2/1} \times i_{1/2} = 1$

Circularité (Transitivité): $i_{3/1} = i_{3/2} \times i_{2/1}$

GENERALISATION:

Réversibilité:

Quand on inverse le rôle de la base de référence et celle de la valeur courante, l'indice élémentaire s'inverse à près :

$$I_{r/c} = 10^4 \cdot \frac{1}{I_{c/r}}$$

EXEMPLE

- Le revenu moyen des habitants de Casa exprimé en indice par rapport à celui des habitants de Rabat est de 125 en 2000.
- Quel est celui des habitants de Rabat exprimé par rapport à ceux de Casa ?

$$I_{RABAT/CASA} = \frac{1}{I_{CASA/RABAT}} \cdot 10^4 = 80.$$

INDICES ELEMENTAIRES

Propriétés:



GENERALISATION:

Circularité

- Un indice à la date t exprimé par rapport à une année de référence t' , peut être décomposé en plusieurs indices élémentaires à des dates successives (ou à des dates intermédiaires) de la façon suivante :

$$I_{t/t'} = 100 \cdot \left[\frac{I_{t/t-1}}{100} \cdot \frac{I_{t-1/t-2}}{100} \cdot \dots \cdot \frac{I_{t'+1/t'}}{100} \right]$$

INDICES ELEMENTAIRES

Propriétés



Cas particuliers : Utile pour changement de base

- Soit deux indices $I_{t/0}$ et $I_{t'/0}$, exprimés en base 0 (année 0). On veut exprimer l'indice à la date t par rapport à la date t' .

$$I_{t/0} = 100 \cdot \left[\frac{I_{t/t'}}{100} \cdot \frac{I_{t'/0}}{100} \right]$$

D'où :

$$I_{t/t'} = 100 \cdot \left[\frac{I_{t/0}}{I_{t'/0}} \right]$$

Exemple

Année	PIB/habitant : Indice (base 100 en 1980)
1980	100
1990	130
2000	145

- Quel est l'indice en 2000, base 100 en 1990 ?

$$I_{2000/90} = 100 \cdot \left[\frac{I_{2000/80}}{I_{1990/80}} \right] = 100 \frac{145}{130} = 111.5$$

INDICES ELEMENTAIRES

Propriétés

Multiplication

- Si une grandeur simple z est le produit de deux grandeurs x et y , l'indice élémentaire de la grandeur produit est égal au produit des indices des grandeurs facteurs :

Quelque soit t :

$$z_t = x_t \times y_t \Rightarrow I_{t/0}(z) = I_{t/0}(x) \times I_{t/0}(y)$$

Cas particulier : valeur = prix \times quantité

Par définition :

L'indice élémentaire de valeur est égal à la multiplication de l'indice élémentaire de prix par l'indice élémentaire de quantité.

INDICES ET TAUX DE VARIATION

$$r_{1/0} = \frac{y_1 - y_0}{y_0}$$

Taux de variation ou taux de croissance de la variable y entre la date t_0 et la date t_1

$$r_{1/0} = \frac{y_1}{y_0} - 1 = i_{1/0} - 1 \quad r = i - 1 \quad i = 1 + r$$

$$y_1 = (1 + r_{1/0})y_0 \Leftrightarrow y_1 = i_{1/0} y_0$$

$$i = 1 + r = \text{coefficient multiplicateur}$$

$$r=0 \Leftrightarrow i=1 \quad \text{Pas d'évolution}$$

$$r>0 \Leftrightarrow i>1 \quad \text{Croissance}$$

$$-100\% = -1 < r < 0 \Leftrightarrow 0 < i < 1 \quad \text{Décroissance}$$

INDICES USUELS

Indice élémentaire des prix $i(P)_{1/0} = \frac{P_1}{P_0}$

Indice élémentaire des quantités
(ou des volumes) $i(Q)_{1/0} = \frac{Q_1}{Q_0}$

Indice élémentaire de valeur

(ou de dépense) $i(V)_{1/0} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{P_1 Q_1}{P_0 Q_0} = i(P)_{1/0} i(Q)_{1/0}$

Exemple

Augmentation de novembre 2000 à novembre 2008

$$= 100 \left(\frac{400 - 200}{200} \right) = 100 \%$$

et non pas : $60 + 25 = 85 \%$

Les taux de variations ne s'accumulent pas

INDICES USUELS

Indice élémentaire des prix $i(P)_{1/0} = \frac{P_1}{P_0}$

Indice élémentaire des quantités
(ou des volumes) $i(Q)_{1/0} = \frac{Q_1}{Q_0}$

Indice élémentaire de valeur
(ou de dépense)

$$i(V)_{1/0} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{P_1 Q_1}{P_0 Q_0} = i(P)_{1/0} i(Q)_{1/0}$$

INDICES SYNTHETIQUES



- Les indices synthétiques sont des grandeurs complexes qui sont composées d'un nombre plus ou moins grand de grandeurs simples : par exemple le niveau général des prix est constitué des prix des divers aliments et boissons, du logement, de l'équipement ménager, de l'habillement, des services médicaux, des transports, etc.
- L'opération de construction d'un indice synthétique relatif à la variation d'une grandeur complexe consiste donc à résumer une série d'indices élémentaires. Trois formules d'indices synthétiques sont utilisées en pratique : les formules de Laspeyres, de Paasche et de Fisher.

Coefficient budgétaire



- Considérons n produits P_j dont on connaît les prix et les quantités à deux périodes différentes.
- On appelle coefficient budgétaire (coefficient de pondération) du produit par rapport à l'une de ces périodes, la part représentée par la valeur (prix par quantité) de ce produit à cette période relativement à la valeur totale de tous les produits à cette même période.
- Notons le coefficient budgétaire par rapport à la période de base :

$$\alpha_{j,0} = \frac{p_{j,0} \cdot q_{j,0}}{\sum_{j=1}^n [p_{j,0} \cdot q_{j,0}]}$$

Coefficient budgétaire

Notons le coefficient budgétaire par rapport à la période courante :

$$\alpha_{j,t} = \frac{p_{j,t} \cdot q_{j,t}}{\sum_{j=1}^n [p_{j,t} \cdot q_{j,t}]}$$

On a bien : $\sum_{j=1}^n \alpha_{j,0} = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,t} = 1$

La somme des coefficients budgétaires est toujours égale à un.

Indice de valeur

- Un indice de valeur est le rapport de la somme des valeurs (produit du prix par la quantité correspondante) relatives à la période courante à la somme des valeurs de la période de base

$$V_{t/0} = \frac{\sum_{j=1}^n [p_{j,t} q_{j,t}]}{\sum_{j=1}^n [p_{j,0} q_{j,0}]}$$

- Par exemple l'indice de la valeur courante des importations est le rapport de la valeur totale des importations pendant la période courante à leur valeur totale pendant la période de base

INDICES SYNTHETIQUES DE LASPEYRES



Indice de Laspeyres des prix

$L(P)_{1/0}$ = Moyenne arithmétique des indices élémentaires des prix, base 100, pondérés par des coefficients budgétaires relatifs à la date de référence t_0

$$\begin{aligned} L(P)_{1/0} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{j,0} I(P_j)_{1/0} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,1} Q_{j,0}}{\sum_{j=1}^n P_{j,0} Q_{j,0}} \times 100 \end{aligned}$$

Indice de Laspeyres des prix



Pour s'en souvenir

$$L(P)_{1/0} = \frac{\text{Dépense de la date courante avec les quantités de référence}}{\text{Dépense de la date de référence}} \times 100$$

INDICES SYNTHETIQUES DE LASPEYRES



Indice de Laspeyres des quantités

$L(Q)_{t_0}$ = Moyenne arithmétique des indices élémentaires des quantités, base 100, pondérés par des coefficients de pondération relatifs à la date de référence t_0

$$\begin{aligned}
 L(Q)_{t_0} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{j,0} I(Q_j)_{t_0} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,0} Q_{j,1}}{\sum_{j=1}^n P_{j,0} Q_{j,0}} \times 100 \\
 &= \frac{\text{Dépense de la date courante avec les prix de référence}}{\text{Dépense de la date de référence}} \times 100
 \end{aligned}$$

INDICES SYNTHETIQUES DE PAASCHE



Indice de Paasche des prix

$P(P)_{t_0}$ = Moyenne harmonique des indices élémentaires des prix, base 100, pondérés par des coefficients de pondération relatifs à la date courante t_1

$$\begin{aligned}
 P(P)_{t_0} &= \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{j,1}}{I(P_j)_{t_0}}} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,1} Q_{j,1}}{\sum_{j=1}^n P_{j,0} Q_{j,1}} \times 100 \\
 &= \frac{\text{Dépense de la date courante}}{\text{Dépense de la date de référence avec les quantités courantes}} \times 100
 \end{aligned}$$

INDICES SYNTHETIQUES DE PAASCHE



Indice de Paasche des quantités

$P(Q)_{t/0}$ = Moyenne harmonique des indices élémentaires des quantités, base 100, pondérés par des coefficients de pondération relatifs à la date courante t_1

$$\begin{aligned} P(Q)_{t/0} &= \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{j,t}}{I(Q_j)_{t/0}}} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,t} Q_{j,t}}{\sum_{j=1}^n P_{j,t} Q_{j,0}} \times 100 \\ &= \frac{\text{Dépense de la date courante}}{\text{Dépense de la date de référence avec les prix courants}} \times 100 \end{aligned}$$

Indice de Fisher



- L'indice de Fisher est la moyenne géométrique simple des indices de Laspeyres et de Paasche :

$$F_{t/0} = \sqrt{L_{t/0} \cdot P_{t/0}}$$

Indice de Fisher des prix

$$F(p)_{t/0} = \sqrt{L(p)_{t/0} \cdot P(p)_{t/0}}$$

Indice de Fisher des quantités

$$F(q)_{t/0} = \sqrt{L(q)_{t/0} \cdot P(q)_{t/0}}$$

Remarque

- L'indice de Laspeyres a tendance à surestimer une hausse des prix, tandis que l'indice de Paasche a tendance à la sous-estimer. On en déduit que l'indice de Fisher doit donner une meilleure estimation d'une hausse des prix.
- On sait aussi que la moyenne harmonique est inférieure à l'arithmétique, ceci fait que l'indice de Paasche est souvent plus petit que l'indice de Laspeyres.
- La comparaison des indices de Laspeyres et de Paasche ne peut se faire que si les coefficients de pondération sont les mêmes.

APPLICATION

- Calculons les indices de valeur, de Laspeyres, de Paasche et de Fisher pour 2009 par rapport à 2006 sur l'ensemble des quatre produits décrits ci-dessous :

Produits	2006		2009	
	Prix	Quantité	Prix	Quantité
A	9,00	27	9,25	37
B	4,90	31	5,20	40
C	3,65	40	5,00	28
D	8,10	15	7,70	30

APPLICATION

	j	$p_0 q_0$	$p_0 q_1$	$p_1 q_0$	$p_1 q_1$
A	1	243,00	333,00	249,75	342,25
B	2	151,90	196,00	161,20	208,00
C	3	146,00	102,20	200,00	140,00
D	4	121,50	243,00	115,50	231,00
	Total	662,40	874,20	726,45	921,25

APPLICATION

- Indice de valeur $V_{t/0}$

$$V_{t/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{921,25}{662,40} \times 100 = 139,07$$

- Indice de Laspeyres des prix

$$L(p)_{t/0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{726,45}{662,40} \times 100 = 109,67$$

- Indice de Laspeyres des quantités

$$L(q)_{t/0} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{874,20}{662,40} \times 100 = 131,97$$

APPLICATION

- Indice de Paasche des prix

$$P(p)_{t/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100 = \frac{921,25}{874,20} \times 100 = 105,38$$

- Indice de Paasche des quantités

$$P(q)_{t/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0} \times 100 = \frac{921,25}{726,45} \times 100 = 126,81$$

APPLICATION

- Indice de Fisher des prix

$$F(p)_{t/0} = \sqrt{L(p)_{t/0} \cdot P(p)_{t/0}} = \sqrt{109,67 \times 105,38} = 107,50$$

- Indice de Fisher des quantités

$$F(q)_{t/0} = \sqrt{L(q)_{t/0} \cdot P(q)_{t/0}} = \sqrt{131,97 \times 126,81} = 129,36$$

Utilisation des indices



- L'indice de Laspeyres est le plus commode à utiliser ; la plupart des indices courants établis par les instituts du monde entier sont du type « Laspeyres ».
- L'indice de Paasche, symétrique de celui de Laspeyres quant à sa signification, présente des inconvénients pratiques à cause de la mise à jour permanente de ses pondérations. Il n'est, de ce fait, pas utilisé dans le calcul direct des indices courants. Son calcul est néanmoins intéressant pour obtenir, avec l'indice de Laspeyres, une fourchette d'estimation.



ETU UP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Economie
Chimie Organique
Informatique
Optique
Diapo
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..